Komplexní čísla 1: Operace

Na cvičení jsme si rozmysleli, že ani v reálných číslech neumíme obecně všechny algebraické operace, konkrétně nám stále chybí možnost spočítat druhou odmocninu z libovolného čísla.

Vždy když lidstvo v minulosti potřebovalo v matematice novou operaci, „zvětšilo si hřiště“:

- když bylo potřeba začít odčítat přirozená čísla, přidala se záporná čísla a vznikla celá čísla
- když bylo potřeba celá čísla dělit, vznikly zlomky a tím i racionální čísla
- o podstatě vzniku reálných čísel raději budeme mlčet, to je tak trochu záhada.

My si tedy nyní „zvětšíme hřiště“ a k reálným číslům přidáme čísla tak, abychom mohli dělat druhé odmocniny i ze záporných čísel – dostaneme tak **komplexní čísla**, značit je budeme $\mathbb{C}$. Pak už budeme umět libovolné odmocniny ze všech čísel: třetí, páté,... odmocniny už v $\mathbb{R}$ umíme a čtvrté, šesté... umíme počítat pomocí iterování druhých odmocnin.

Základní stavební kameny pro komplexní čísla jsou reálná čísla a číslo, které značíme i, říkámu mu *komplexní jednotka* a víme o něm jedině to, že

$$\boxed{\mathbf{i^2 = -1}}$$

Pár poznámek:

- i je opravdu číslo, ač ho značíme písmenem; může se to zdát divné, ale podobná situace je i u π (o něm víme, že je to poměr obvodu kruhu a jeho průměru), resp. u e (že jde o jakousi limitu, která čirou náhodou vyjde cca $2,7182\ldots$); stejně tak o čísle $t = \sqrt{35728}$ víme jen to, že $t^2 = 35728$; podobně o i víme, že $i^2 = -1$
- je sice pravda, že $i^2 = -1$, ale **není pravda**, že $i = \sqrt{-1}$
- v $\mathbb{C}$ už nemůžeme porovnávat čísla mezi sebou: neexistují zde pojmy „větší než“, „menší než“, takže nelze říci, jestli např. je i větší než 2 atd. a musíme se smířit s faktem, že i **prostě je**.

Každé komplexní číslo má tvar

$$\boxed{\mathbf{a + b \cdot i}}$$

kde a, b jsou reálná čísla (tomuto tvaru říkáme **algebraický tvar**). Tedy příklady komplexních čísel v algebraickém tvaru jsou $1 + 2i$, $\frac{2}{3} + \sqrt{5}i$, $-13\,(= -13 + 0 \cdot i)$, $\frac{7}{6}i\,\left(= 0 + \frac{7}{6}i\right)$. Číslu a říkáme **reálná část**, číslu b **imaginární část**.

Operace s komplexními čísly Postupně si projdeme všech šest algebraických operací, které v $\mathbb{C}$ umíme, dnes první čtyři:

„+“ při sčítání komplexních čísel sčítáme reálné části spolu a nezávisle na nich imaginární části:

$$(2 + 5i) + (4 - 3i) = (2 + 4) + (5 - 3)\,i = 6 + 2i$$

„−“ odčítání funguje analogicky jako sčítání:

$$(2 + 5i) - (4 - 3i) = (2 - 4) + (5 - (-3))\,i = -2 + 8i$$

„×“ při násobení násobíme metodou „každý s každým“ a nakonec využijeme faktu $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(2 + 5i) \cdot (4 - 3i) &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3)\,i + 5i \cdot 4 + 5i \cdot (-3)\,i = \\ &= 8 - 6i + 20i - 15\underbrace{i^2}_{-1} = 8 - 6i + 20i - 15 \cdot (-1) = \\ &= 23 + 14i\end{aligned}$$

„÷“ při dělení využíváme malý trik:

$$(2+5i):(4-3i) = \frac{(2+5i)}{(4-3i)} = \frac{(2+5i)}{(4-3i)} \cdot \underbrace{\frac{4+3i}{4+3i}}_{=1} = \frac{(2+5i)\cdot(4+3i)}{(4-3i)\cdot(4+3i)} = \frac{-7+26i}{25}$$
$$= \frac{-7}{25} + \frac{26}{25}i$$

Proč je potřeba při dělení tolik práce? Nestačí prostě napsat $(2+5i):(4-3i) = \frac{(2+5i)}{(4-3i)}$? Bohužel ne, protože zlomek $\frac{(2+5i)}{(4-3i)}$ nemá tvar $a+bi$, jak jsme definovali komplexní číslo v úvodu. Neumíme pak např. určit reálnou, resp. imaginární část. Je to podobné, jako když číslo $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ upravujeme na $\frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{-1} = -1-\sqrt{2}$.

(Pokud byste se chtěli zase podívat na nějaká videa, tak solidní možnosti jsou:

- kanál *isibalo*: `https://www.youtube.com/playlist?list=PLD-MTmOzXT5OxEfOyFqHm8vjtYY44BUh7` (pro nás jsou teď zajímavá videa č. 1, 5, 6, 7, 8)
- Marek Valášek: `https://www.youtube.com/watch?v=aKAbOuV8rUw#t=1m9s` (pozor! Hned zezačátku pronese – a dokonce napíše – kacířskou myšlenku „$i = \sqrt{-1}$“, odpusťme mu to.)

A nyní trochu praxe, spočtěte následující příklady:

1. společné

   (a) položme $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+3i$. Spočtěte a u každého výsledku určete reálnou část $\mathbf{Re}\,(\mathrm{w})$ a imaginární část $\mathbf{Im}\,(\mathrm{w})$:

   i. $w = z_1 + z_2$ $[3+2i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 3, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = 2]$

   ii. $w = z_1 - z_2$ $[1-4i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 1, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = -4]$

   iii. $w = z_1 \cdot z_2$ $[5+5i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 5, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = 5]$

   iv. $w = z_1 : z_2$ $[-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = -\frac{1}{10}, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = -\frac{7}{10}]$

   v. $w = (z_1)^2$ $[3-4i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 3, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = -4]$

   vi. $w = \frac{2+i}{i} + \frac{i}{i+1} - \frac{2i+1}{i-1}$ $[1, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 1, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = 0]$

   vii. $w = \frac{\frac{i}{2-i}+\frac{1}{i}}{1+\frac{1}{2i+1}}$ $[-\frac{1}{2}i, \mathbf{Re}\,(\mathrm{w}) = 0, \mathbf{Im}\,(\mathrm{w}) = -\frac{1}{2}]$

   viii. Pro která $k \in \mathbb{R}$ je reálná část komplexního čísla $\frac{k+2i}{k-i}$ rovna $0,25$? $[k = \pm\sqrt{3}]$

   Máme-li komplexní číslo z, které má tvar $a+bi$, pak definujeme číslo s ním **komplexně sdružené** (značíme ho $\overline{z}$) jako $a-bi$. Tedy například k číslu $z = 6+3i$ je $\overline{z} = 6-3i$, k číslu $w = -5i$ je $\overline{w} = 5i$ a k číslu $u = 17$ je $\overline{u} = 17$. Všimněte si, že komplexně sdružené číslo k děliteli využíváme při dělení komplexních čísel.

   (b) Určete $\overline{z}$, je-li

   i. $z = \frac{1+5i}{3}$ $[\overline{z} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i]$

   ii. $z = \frac{4-2i}{i}$ $[\overline{z} = -2+4i]$

   iii. $z = (2+i)(3-i)$ $[\overline{z} = 7-i]$

   (c) Spočtete:

   i. $\overline{\overline{3+4i}+3-7i}$ $[6+11i]$

   ii. $\overline{\left(\frac{1+i}{2-i}\right)}$ $[\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i]$

   iii. $\frac{\overline{1+i}}{\overline{2-i}}$ $[\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i]$

Život s komplexními čísly je méně komplexní než bez nich, hurá!